

# Skúmanie inverzie pomocou dynamického geometrického programu

## Investigation in Inversive Geometry with Dynamic Geometric Program



**Mária Kmeťová**

### **Abstract**

The paper contains global characteristic of inversion in  $n$ -dimensional Euclidean space and its special cases such sphere and circle inversion. Using dynamic geometric software GeoGebra, there are investigated properties of circle inversion and solved problems leading to illustration of Steiner's porism.

### **Keywords**

Inversive geometry, spherical inversion, circle inversion, dynamic geometry

## 1 Úvod

V školskej syntetickej geometrii sa vyučujú geometrické transformácie zhodnosť a potom neskôr podobnosť, z ktorých každá disponuje vlastnosťou, že priamky sa zobrazia do priamok a veľkosti uhlov sa zachovávajú. Príklad zobrazenia, ktorá nie je kolineáciou a zároveň je izogonálna transformácia je inverzia vymyslená L. J. Magnusom v roku 1831 [1]. V Kleinovom chápaní geometrie, ak uvažujeme transformačnú grupu inverzií na neprázdnej množine bodov, tak dostaneme tzv. inverzívnu geometriu. V euklidovskej geometrii hrajú hlavnú rolu priamky a roviny, v inverzívnej geometrii kružnice a guľové plochy (v závislosti od dimenzie priestoru, kde transformácia pracuje).

Kružnicová inverzia sa vyučuje v rámci syntetickej geometrie na bakalárskom stupni štúdia učiteľstva matematiky. V článku uvedieme širšie súvislosti a všeobecnejší pohľad na túto časť geometrie.

## 2 Inverzia

V  $n$ -rozmernom euklidovskom priestore (euklidovskom preto, lebo potrebujeme pojem vzdialenosti) definujeme inverziu nasledovne:

*Definícia 1.* Transformácia priestoru  $E^n \setminus \{O\}$ , ktorá priradí každému bodu  $P$  bod  $P' = O + \frac{(P-O) \cdot r^2}{|P-O|^2}$ , sa nazýva inverzia v priestore  $E^n \setminus \{O\}$ .

*Veta 1.* Samodružné body inverzie v  $E^n \setminus \{O\}$  tvoria hypersféru so stredom  $O$  a polomerom  $r$ .

Dôkaz: Pre body  $P$  hypersféry so stredom  $O$  a polomerom  $r$  platí:  $|P-O|=r$ . Potom  $P' = O + \frac{(P-O) \cdot r^2}{r^2}$ , teda  $P' = O + (P-O) = P$ .

*Veta 2.* Inverzia je antikonformná transformácia (zachováva veľkosť uhlov a súčasne mení ich orientáciu).

Bod  $O$  sa nazýva stredom inverzie alebo pólom, kladné číslo  $r$  sa nazýva polomerom inverzie.

Na základe invariantov sa inverzia nazýva sférická pre  $n=3$  a kružnicová pre  $n=2$ .

Z definície inverzie bezprostredne vyplýva, že priamky prechádzajúce bodom  $O$  sú samodružné (nie bodovo). Ak uvažujeme rozšírený priestor doplnený nevlastnými bodmi, tak môžeme doplniť každú priamku o jej nevlastný bod a ten chápať ako „obraz“ bodu  $O$  na tej priamke. Pretože bod  $O$  má mať jediný obraz v zobrazení, doplníme priestor  $E^n$  o jediný nevlastný bod  $N$  a upravíme predchádzajúcu definíciu takto:

*Definícia 2.* Transformácia priestoru  $E^n \cup \{N\}$ , ktorá priradí každému bodu  $P \neq O$ ,  $P \neq N$  bod  $P' = O + \frac{(P-O) \cdot r^2}{|P-O|^2}$  a bodu  $O$  bod  $N$  navzájom, sa nazýva inverzia v priestore  $E^n \cup \{N\}$ .

Po takomto doplnení nadroviny priestoru  $E^n$  môžeme chápať ako hypersféry prechádzajúce bodom  $N$ . Potom platí:

**Veta 3.** Inverzia  $\mathcal{S}$  daná Definičiou 2 zobrazí každú hypersféru do hypersféry.

**Veta 4.** Inverzia  $\mathcal{S}$  je involutórne zobrazenie.

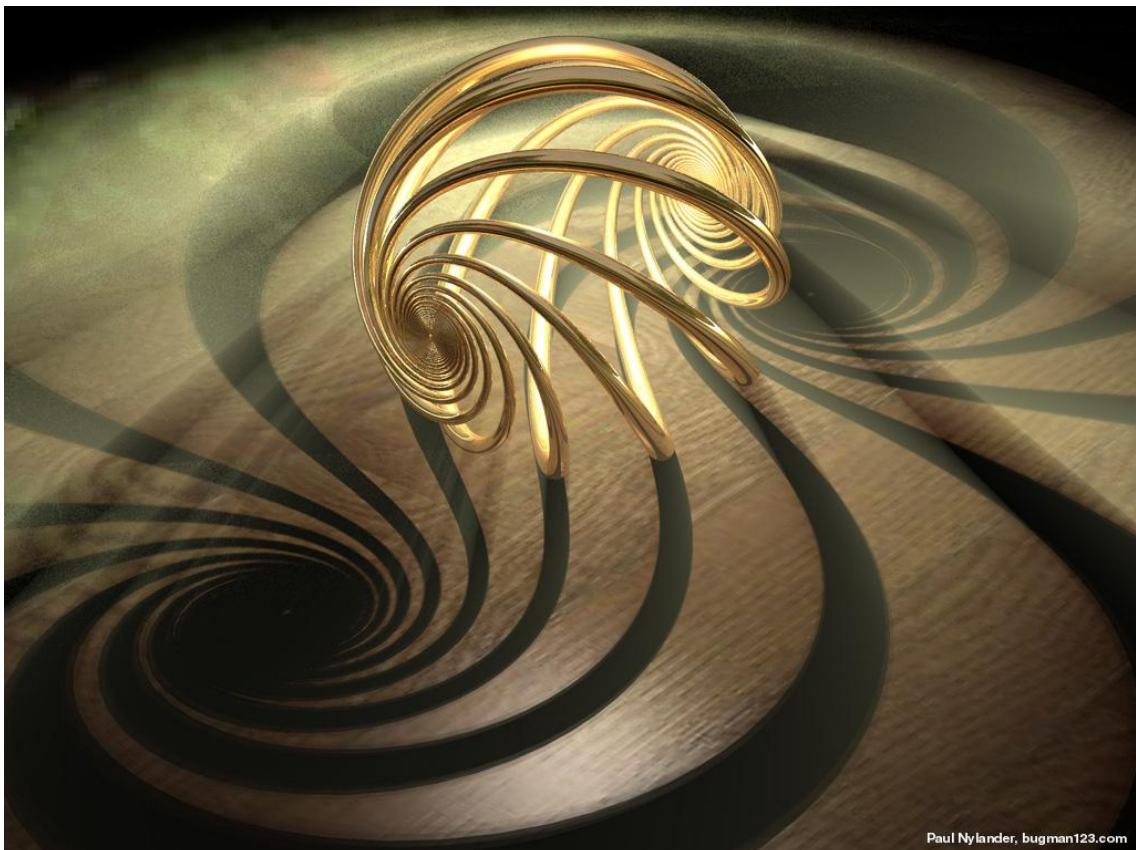
**Dôkaz:** Pre bod  $O$  platí:  $\mathcal{S} \mathcal{S} (O) = \mathcal{S} (N) = O$ , takisto  $\mathcal{S} \mathcal{S} (N) = \mathcal{S} (O) = N$ . Pre body rôzne od  $O$  a  $N$  platí:  $\mathcal{S} \mathcal{S} (P) = \mathcal{S} \left( O + \frac{(P-O)r^2}{|P-O|^2} \right)$ , čo po úprave dáva  $\mathcal{S} \mathcal{S} (P) = O + \frac{(P-O)r^4|P-O|^4}{r^4|P-O|^4} = P$ .

**Poznámka.** Dôkazy viet 2 a 3 neuvádzame, sú zovšeobecnením známych obdobných viet pre  $n = 2$ , ktoré nájdeme napr. v [2].

### 2.1 Sférická inverzia

Sférická inverzia je daná stredom  $O \in E^3$  a kladným číslom  $r$ , ktoré môžeme chápať aj ako polomer guľovej plochy inverzie so stredom  $O$ . Podľa Vety 3 sférická inverzia zobrazí guľové plochy neprechádzajúce stredom inverzie (pólom) do guľových plôch neprechádzajúcich pólom, guľové plochy prechádzajúce pólom do rovín neprechádzajúcich pólom, a roviny prechádzajúcich pólom do seba. Z involutórnosti zobrazenia tiež vyplýva, že obrazom rovín neprechádzajúcich pólom je guľová plocha prechádzajúca pólom.

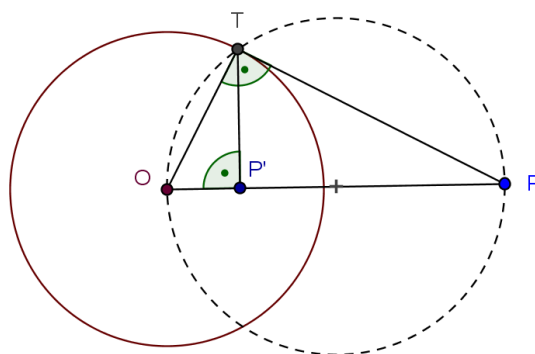
Veľmi dôležitým špeciálnym prípadom sférickej inverzie je zobrazenie guľovej plochy  $G$  s priemerom  $r$  a prechádzajúcej pólom  $O$ . Obrazom takejto guľovej plochy je rovina, ktorá sa dotýka guľovej plochy inverzie a plochy  $G$  v ich spoločnom dotykovom bode, ktorý je jediným samodružným bodom na  $G$ . Toto zobrazenie guľovej plochy  $G$  na rovinu sa nazýva **stereografická projekcia so stredom  $O$** .



Obr. 1 Ilustrácia stereografickej projekcie prevzatá z [www.bugman123.com](http://www.bugman123.com) Math Artwork

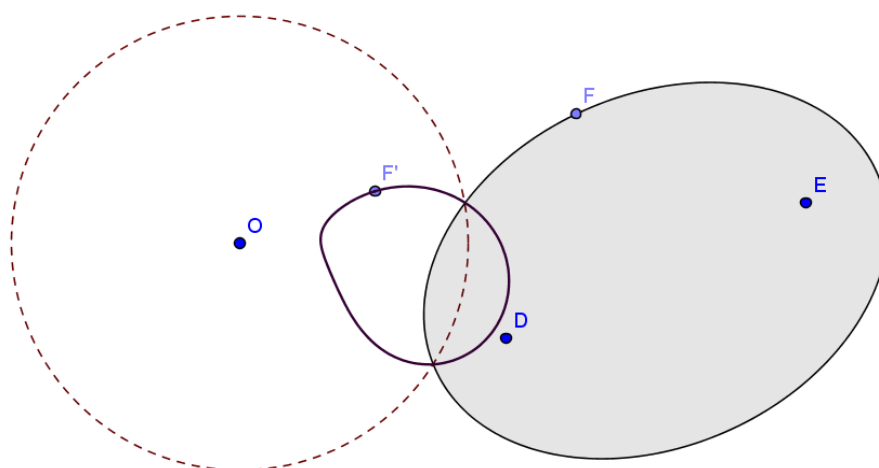
## 2.2 Kružnicová inverzia

Kružnicovú inverziu dostaneme z definície 1 pre  $n=2$ . V rovine môžeme zostrojiť obraz bodu  $P \neq O$  v kružnicovej inverzii so stredom  $O$  a polomerom  $r$  pomocou Euklidovej vety o odvesne aplikovanej na pravouhlý trojuholník  $OTP$  (Obrázok 2; body  $P$  a  $P'$  sú navzájom inverzné, poradie krokov konštrukcie trojuholníka  $OTP$  sa mení podľa toho, či vychádzame z vnútorného alebo vonkajšieho bodu kružnice inverzie).



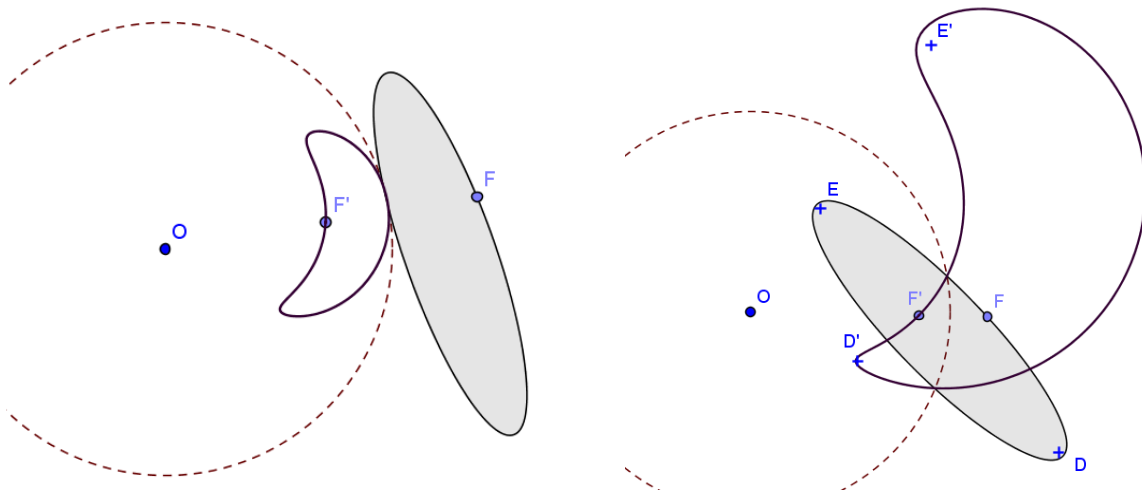
Obr. 2 Konštrukcia navzájom inverzných bodov

Keď už poznáme konštrukciu inverzných bodov, môžeme zostrojiť aj inverzný obraz množín bodov. Dynamické programy dávajú možnosť objavovať niektoré vlastnosti kružnicovej inverzie experimentovaním. Môžeme zostrojiť obraz priamky, kružnice, ale aj kvadratických kriviek bez väčšej námahy, sledovať dynamicky zmeny tvaru vzoru a inverzného obrazu a tým sa vytvára lepšia predstava o fungovaní inverzie ako keby sme mali možnosť zostrojiť len obrazy niekoľkých bodov (Obrázok 3, 4).



Obr. 3 Inverzný obraz elipsy danej ohniskami  $D$ ,  $E$  a bodom  $F$

Pri konštrukcii inverzných obrazov rôznych geometrických útvarov môžeme využiť programy GeoGebra alebo Euklides, kde konštrukcia inverzného bodu sa nachádza medzi zabudovanými funkciami, alebo vytvoriť makro pre inverziu podľa obrázku 2 v dynamickom programe, v ktorom táto možnosť zabudovaná nie je.



Obr. 4 Meniaci sa inverzný obraz elipsy vzhľadom na jej vzájomnú polohu s kružnicou inverzie

Bez dynamického programu by sme mali možnosť zobrazit' inverzné obrazy rovinných útvarov len využitím tzv. Peaucellierovho inverzora. Tento prístroj objavený v roku 1864 francúzskym armádnym dôstojníkom Charles-Nicolas Peaucellierom (1832–1913) a litovským rabínom Yom Tov Lipman Lipkinom (1810-1883, známy ako Rabbi Israel Lipkin Salanter) je základným mechanizmom v kinematike, ktoré umožňuje prevod kruhového pohybu na lineárny. Samozrejme dĺžky ramien obmedzujú dokreslenie útvarov vo vzdialenosti menšej ako  $b-a$  a väčšej ako  $a+b$  od stredu  $O$ . Peaucellierov inverzor sa skladá z kosoštorca  $PAP'B$  so stranami dĺžky  $a$  a dvoch ramien  $OA, OB$  dĺžky  $b$  (Obrázok 5). Ak sa bod  $P$  pohybuje po kružnici, jeho obraz  $P'$  sa pohybuje na priamke.



Obr. 5 Peaucellierov inverzor s ramenom zabezpečujúcim pohyb bodu  $P$  po kružnici a jeho náčrt

Z dĺžok ramien inverzora vyplýva, že body  $O, P, P'$  sú kolineárne. Dokážeme ešte, že  $P'$  je obrazom bodu  $P$  v kružnicovej inverzii s pólom  $O$ . Podľa definície 1 platí  $P' = O + \frac{(P-O).r^2}{|P-O|^2}$ , teda

pre dĺžku vektora  $P'-O$  platí  $|P' - O| = \frac{|P-O|.r^2}{|P-O|^2}$ , t. j.  $|OP'| \cdot |OP| = r^2$ .



Vypočítame tento súčin podľa náčrtu inverzora na obrázku 5 a zároveň vypočítame polomer inverzie určený dĺžkami ramien  $a$  a  $b$ .

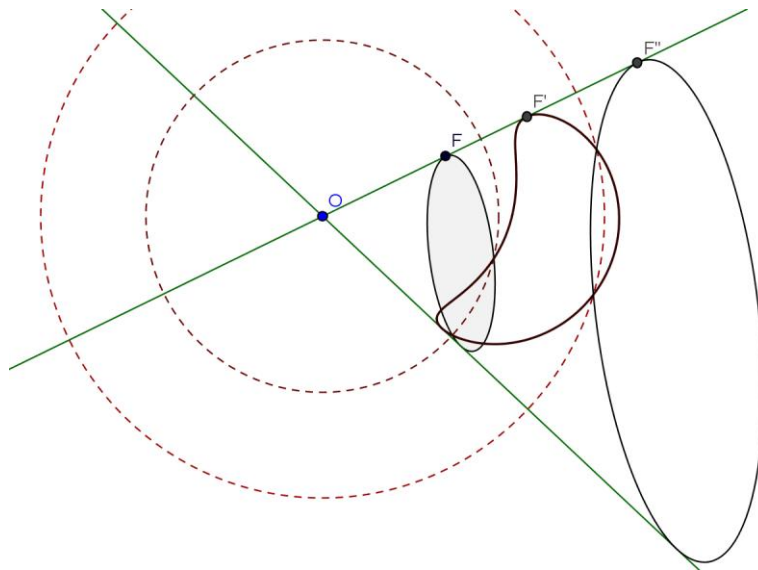
Označme písmenom  $M$  stred kosoštvorca  $PAP'B$ , potom platí:

$$|OP'| \cdot |OP| = (|OM| - |PM|)(|OM| + |PM|) = |OM|^2 - |PM|^2 = |OM|^2 - (|PA|^2 - |MA|^2) =$$

$$= |OM|^2 - |PA|^2 + (|OA|^2 - |OM|^2) = |OA|^2 - |PA|^2 = b^2 - a^2.$$

Dostali sme, že Peaucellierov inverzor s ramenami dĺžky  $a$  a  $b$  zobrazí body v kružnicovej inverzii s polomerom  $r = \sqrt{b^2 - a^2}$ .

Experimentovaním môžeme vytvoriť hypotézu, že skladaním kružnicových inverzií vzhľadom na sústredné kružnice dostaneme podobnosť (Obrázok 6).



Obr. 6 Obraz elipsy v zloženom zobrazení

**Veta 5.** Súčin dvoch inverzií s totožným pólom  $O$  je rovnoľahlosť so stredom  $O$ .

**Dôkaz:** Podľa definície pre obraz bodu  $P$  v kružnicovej inverzii s polomerom  $r$  platí:

$$P' = O + \frac{(P-O) \cdot r^2}{|P-O|^2}, \text{ ďalej v inverzii s tým istým pólom ale s polomerom } k: P'' = O + \frac{(P'-O) \cdot k^2}{|P'-O|^2}.$$

Vyjadríme bod  $P''$  pomocou  $P$ .

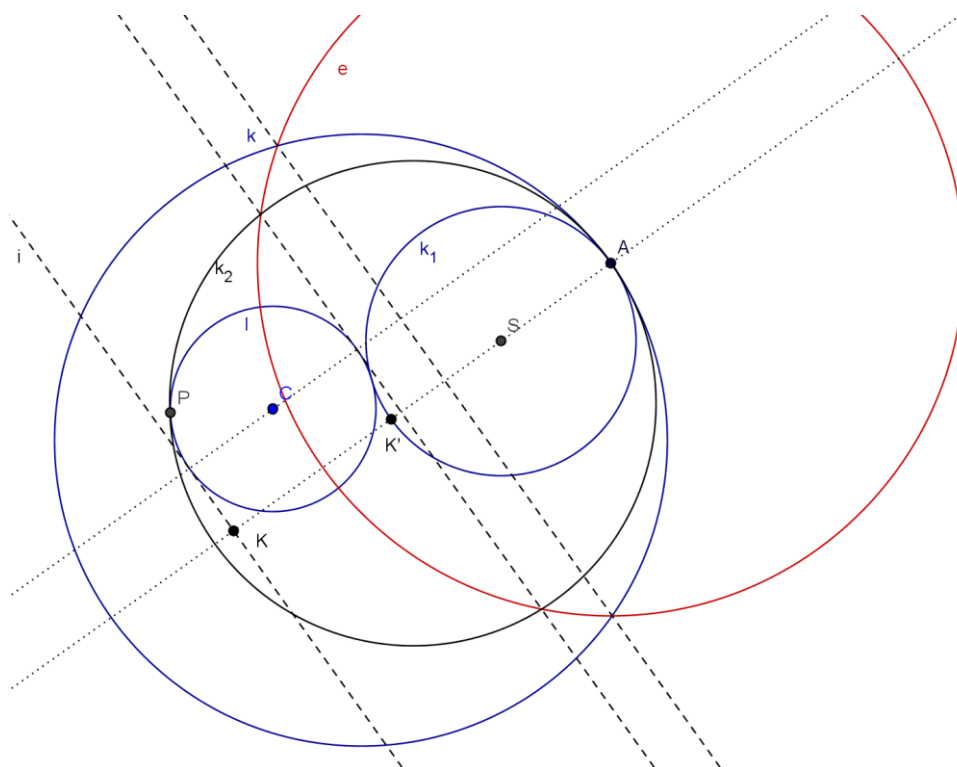
$$P'' = O + \frac{(O + \frac{(P-O)r^2}{|P-O|^2} - O)k^2}{\left|O + \frac{(P-O)r^2}{|P-O|^2} - O\right|^2} = O + \frac{(P-O)r^2k^2}{|P-O|^2 \frac{|P-O|^2r^4}{|P-O|^4}} = O + \frac{k^2}{r^2}(P-O).$$

Dostali sme, že súčinom dvoch inverzií s totožným pólom  $O$  a polomerami  $r$  a  $k$  v tomto poradí je rovnoľahlosť so stredom  $O$  a koeficientom rovnoľahlosti  $\frac{k^2}{r^2}$ .

## 1. úloha

Nech je daná kružnica  $k$  a v nej kružnica  $l$  tak, že nemajú spoločný bod. Zostrojme kružnicu  $k_1$ , ktorá sa dotýka daných kružníc  $k$  a  $l$ .

Riešenie. Na kružnici  $k$  (alebo na kružnici  $l$ ) si zvolíme bod  $A$ , v ktorom sa jej kružnica  $k_1$  bude dotýkať. Úlohu vyriešime pomocou kružnicovej inverzie s pólom v bode  $A \in k$ . Obrazom kružnice  $k$  bude priamka  $k'$  a obrazom kružnice  $l$  bude kružnica  $l'$ . Potom zostrojíme priamku  $k_1'$ , ktorá bude inverzným obrazom kružnice  $k_1$ . Podľa požiadaviek úlohy priamka  $k_1'$  má vlastnosti zachovávané sa v inverzii, t. j. dotýka sa kružnice  $l'$  a je rovnobežná s priamkou  $k'$ . Zostrojením inverzného obrazu priamky  $k_1'$  dostaneme hľadanú kružnicu  $k_1$ . Na obrázku 7 vidíme výsledok konštrukcie pomocou programu GeoGebra. Riešením sú kružnice  $k_1$  a  $k_2$ .

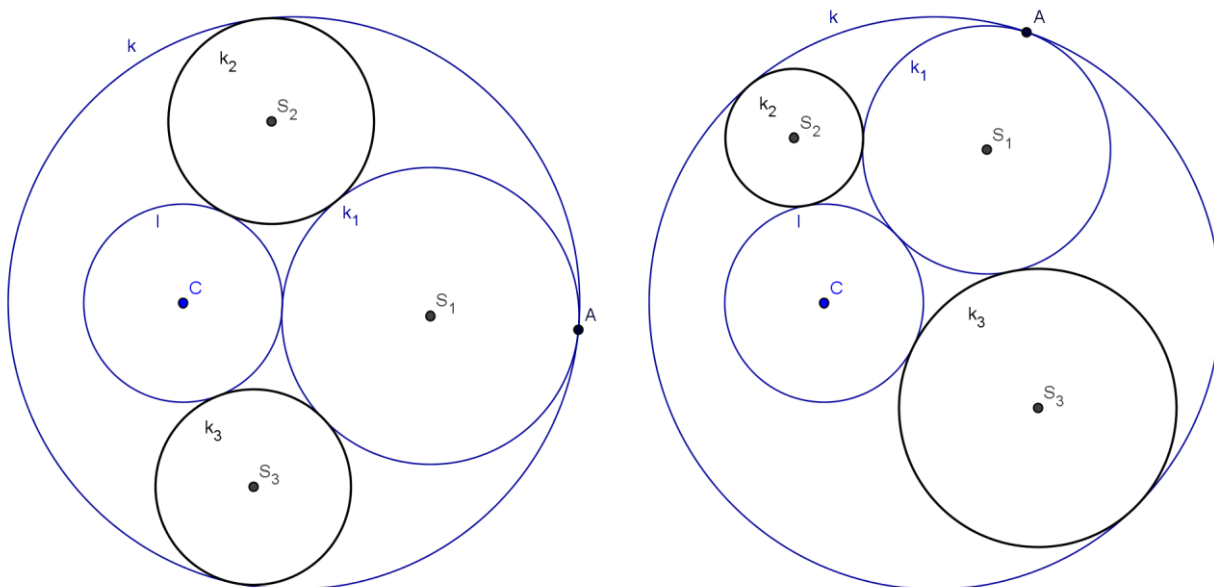


Obr. 7 Dotykové kružnice prechádzajúce bodom  $A$

2. Ku kružniciam  $k_1, l$  dokreslíme kružnice, ktoré sa ich dotýkajú zvonka a kružnice  $k$  sa dotýkajú zvnútra.

Táto úloha je typická Apolóniova úloha, kde sa požaduje zostrojenie dotykovej kružnice  $k$  trom daným kružniciam. Postup riešenia sa nachádza napr. v [2]. Na obrázku 8a je znázornený výsledok konštrukcie pomocou programu GeoGebra. Na obrázku 8b vidíme, že vzájomná poloha kružníc sa nemení, ak sa bod  $A$  v dynamickom programe presúva po kružnici  $k$ .

Ak pokračujeme v začatom procese konštrukcie reťazca vnútorných dotykových kružníc ku kružnici  $k$ , ktoré majú s  $l$  vonkajší dotyk, nakoniec dostaneme kružnicu, ktorá uzatvára kruh dotykových kružníc tak, že sa pretína s už existujúcou spoločnou dotykovou kružnicou kružníc  $k$  a  $l$  alebo sa jej tiež dotýka. Takáto konfigurácia kružníc sa nazýva Steinerov reťazec.



Obr. 8 a, b Dotykové kružnice v kružnici  $k$

Pohybom bodu  $A$  po kružnici  $k$  v dynamickom programe GeoGebra si sami môžeme vytvoriť hypotézu, ktorá je známa ako Steinerova porisma (alebo Steinerovo tvrdenie):

Ak pre jednu polohu bodu  $A$  na kružnici  $k$  dostaneme reťazec vzájomne sa dotýkajúcich kružníc okolo kružnice  $l$ , tak to platí pre všetky polohy bodu  $A$  na kružnici  $k$ .

K dôkazu tohto tvrdenia zase použijeme kružnicovú inverziu, konkrétne tú jej vlastnosť, že ľubovoľné 2 nepretínajúce sa kružnice, z ktorých jedna je vo vnútri druhej, sa dajú inverziou previesť do sústredných kružníc. Pre sústredné kružnice je potom Steinerovo tvrdenie triviálne.

### 3 Záver

Na ilustráciu Steinerovho tvrdenia a jej dôkazu sa dajú pripraviť aj pekné animácie v rôznych dynamických programoch, ako príklad uvádzame

<http://www.cut-the-knot.org/Curriculum/Geometry/SteinerPorism.shtml>

### Literatúra

- [1] Coxeter, H.S.M.: *Introduction to Geometry*. Wiley Classic Library, 1989
- [2] Šedivý a kol.: *Geometria 2*. SPN Bratislava 1987
- [3] [www.geogebra.org](http://www.geogebra.org)

### Kontaktná adresa

Doc. RNDr. Mária Kmeťová, PhD.  
Katedra matematiky FPV UKF v Nitre  
Trieda A. Hlinku 1  
mkmetova@ukf.sk